

Пензенский государственный университет  
Кафедра математики и математического моделирования

---

*А.И. Долгарев*

Краткий курс  
**ЕВКЛИДОВОЙ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ПЕНЗА 2005

Долгарев А.И. Краткий курс евклидовой дифференциальной геометрии: учебное пособие. – Пенза, ПГУ, 2005. – 112с.

Учебное пособие содержит следующие разделы:

- (1) Основные понятия геометрии – векторную аксиоматику Г. Вейля аффинной геометрии, основные свойства прямых и плоскостей; скалярное произведение векторов и пространства со скалярным произведением, в основе их лежит аффинное пространство: евклидово, псевдоевклидово, галилеево; понятие многообразий – евклидова, псевдоевклидова, галилеева; понятие метрического пространства.
- (2) Евклидова дифференциальная геометрия и топология – геометрия кривых и поверхностей, элементы внутренней геометрии поверхностей, первые понятия топологии.
- (3) Элементы собственной геометрии поверхностей – вводится понятие одуля Ли геометрических преобразований; геодезические рассматриваются как траектории преобразований, линии постоянных кривизн как траектории движений; поверхности траекторий как аналог аффинных плоскостей; геодезические координаты на поверхностях.

Учебное пособие предназначено студентам второго курса университета, содержит весь материал, предусмотренный программой. Изложение сжато и оригинально. Понятия неевклидовых многообразий в разделе (1) и раздел (3) в учебной литературе рассматриваются впервые.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	7
-------------------	---

## ЧАСТЬ I АФФИННОЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

---

### Глава 1. Основные аффинные понятия

#### **§ 1. Аффинное пространство**

1.1. ТОЧКИ И ВЕКТОРЫ .....	8
1.2. ВЕКТОРНАЯ АКСИОМАТИКА .....	9
1.3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО .....	9
1.4. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ .....	10
1.5. ПОДПРОСТРАНСТВА, ОБОЛОЧКИ .....	12
1.6. КООРДИНАТЫ ТОЧЕК .....	13

#### **§ 2. Прямые и плоскости.**

2.1. ПРЯМЫЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА ..	14
2.2. ПЛОСКОСТИ .....	15

#### **§ 3. Преобразования аффинного пространства**

3.1. ГРУППА .....	16
3.2. ГРУППА ЛИ .....	17
3.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖЕСТВ .....	17
3.4. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ .....	18
3.5. КОЛЛИНЕАЦИИ .....	20
3.6. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА ..	21
3.7. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ 2-МЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА .....	24

### Глава 2. Основные понятия евклидовой геометрии

#### **§ 4. Пространства со скалярным произведением**

4.1. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ .....	26
4.2. НОРМА ВЕКТОРОВ .....	27
4.3. ЕВКЛИДОВО (СОБСТВЕННО ЕВКЛИДОВО) СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ .....	28
4.4. ПСЕВДОЕВКЛИДОВО СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ .....	29
4.5. ГАЛИЛЕЕВО СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ .....	30
4.6. ГАЛИЛЕЕВА НОРМА ВЕКТОРОВ .....	32
4.7. НОРМА (МЕТРИКА) НА МНОЖЕСТВЕ .....	33

## **§ 5. Векторные функции.**

5.1. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ .....	34
5.2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ .....	34

## **§ 6. Евклидовы точечные пространства**

6.1. ПОЛУЧЕНИЕ ЕВКЛИДОВЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ .....	35
6.2. СОБСТВЕННО ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО .....	36
6.3. ПСЕВЛОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО .....	40
6.4. ГАЛИЛЕЕВО ПРОСТРАНСТВО .....	41
6.5. ПОЛУЕВКЛИДОВА ПЛОСКОСТЬ .....	43

## **§ 7. Многообразия.**

7.1. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО .....	44
7.2. МНОГООБРАЗИЕ .....	45
7.3. ПСЕВДОЕВКЛИДОВО МНОГООБРАЗИЕ .....	45
7.4. ГАЛИЛЕЕВО МНОГООБРАЗИЕ .....	46

# **ЧАСТЬ II**

## **ЕВКЛИДОВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ**

---

### Глава 3. Евклидова дифференциальная геометрия

## **§ 8. Кривые евклидова пространства.**

8.1. РЕГУЛЯРНАЯ КРИВАЯ .....	48
8.2. ДЛИНА ДУГИ. ЕСТЕСТВЕННЫЙ ПАРАМЕТР КРИВОЙ .....	49
8.3. КАСАТЕЛЬНАЯ ПРЯМАЯ И НОРМАЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ КРИВОЙ .....	50
8.4. КАСАТЕЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ И КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ .....	51
8.5. СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ПЛОСКОСТЬ .....	51
8.6. СОПРОВОЖДАЮЩИЙ РЕПЕР КРИВОЙ .....	52

## **§ 9. Кривизна и кручение кривой**

9.1. КРИВИЗНА КРИВОЙ .....	53
9.2. КРУЧЕНИЕ КРИВОЙ .....	53
9.3. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ .....	54
9.4. УПЛОЩЕНИЕ КРИВОЙ .....	54
9.5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ КРИВОЙ .....	55
9.6. ПРЯМАЯ, ОКРУЖНОСТЬ, ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ .....	57
9.7. ЗАДАНИЕ КРИВОЙ ФУНКЦИЯМИ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ .....	57
9.8. ЛИНИИ ПОСТОЯННЫХ КРИВИЗН .....	58
9.9. СТРОЕНИЕ КРИВОЙ ВБЛИЗИ ОБЫКНОВЕННОЙ ТОЧКИ .....	58

## **§ 10. Поверхности евклидова пространства**

10.1.	РЕГУЛЯРНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ .....	59
10.2.	ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ .....	60
10.3.	КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ ПОВЕРХНОСТИ .....	61
10.4.	ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ПОВЕРХНОСТИ .....	62
10.5.	МЕТРИКА НА ПОВЕРХНОСТИ .....	62

## **§ 11. Кривизна поверхности.**

11.1.	КРИВИЗНА ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ .....	64
11.2.	ИНДИКАТРИСА КРИВИЗНЫ .....	65
11.3.	КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ .....	66
11.4.	ГЛАВНЫЕ КРИВИЗНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ .....	67
11.5.	ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЛНОЙ И СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ .....	68
11.6.	ПЛОСКОСТЬ, СФЕРА, ПСЕВДОСФЕРА .....	68

## Глава 4. Основные понятия внутренней геометрии поверхности

### **§ 12. Об определяемости поверхности.**

12.1.	О ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ .....	71
12.2.	ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ПОВЕРХНОСТИ .....	71
12.3.	ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ..	73

### **§ 13. Геодезическая кривизна поверхности.**

13.1.	ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ КРИВИЗНА ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ..	74
13.2.	ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ .....	75

## Глава 5. Элементы топологии

### **§ 14. Основные понятия топологического пространства.**

14.1.	МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА .....	76
14.2.	НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ГОМЕОМОРФИЗМ .....	78
14.3.	ОТДЕЛИМОСТЬ. КОМПАКТНОСТЬ. СВЯЗНОСТЬ .....	79

### **§ 15. О замкнутых поверхностях.**

15.1.	РАЗРЕЗАНИЕ И СКЛЕИВАНИЕ .....	80
15.2.	ЭЛЕМЕНТЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЗАМКНУТЫХ КОМПАКТНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БЕЗ ГРАНИЦЫ .....	80

**ЧАСТЬ III**  
**ОДУЛИ ЛИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

---

Глава 6. Одули Ли преобразований.

**§ 16. Разрешимые 3-мерные одули Ли**

16.1.	ОДУЛИ .....	82
16.2.	ОДУЛИ ЛИ .....	83
16.3.	2-МЕРНЫЕ ОДУЛИ ЛИ .....	83
16.4.	3-МЕРНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ОДУЛИ ЛИ .....	85
16.5.	ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД ОДУЛЯ ЛИ .....	87
16.6.	ПОДОДУЛИ ОДУЛЕЙ ЛИ .....	88
16.7.	ПОРОЖДАЕМОСТЬ ОДУЛЕЙ ЛИ .....	90
16.8.	ПОДОДУЛИ АФФИННОГО ОДУЛЯ .....	91
16.9.	ОДУЛИ ЛИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА .....	93

**§ 17. Вейлевские одулярные пространства**

17.1.	ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЙЛЕВСКОГО ОДУЛЯРНОГО ПРОСТРАНСТВА .....	94
17.2.	ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ ВО-ПРОСТРАНСТВ .....	95
17.3.	ВО-ПРОСТРАНСТВА С ГАЛИЛЕЕВОЙ МЕТРИКОЙ .....	97

Глава 7. Траектории и поверхности траекторий.

**§ 18. Траектории преобразований**

18.1.	УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ .....	98
18.2.	ПРИМЕРЫ ТРАЕКТОРИЙ .....	99
18.3.	СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ .....	101
18.4.	ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЙ .....	102

**§ 19. Поверхности траекторий**

19.1	ОДУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ .....	103
19.2	ПРИМЕРЫ ОДУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТРАЕКТОРИЙ .....	104
19.3	СОБСТВЕННАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДУЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТРАЕКТОРИЙ .....	108
19.4	ПОВЕРХНОСТИ С ОДУЛЕМ РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ 2 .....	109

<b>Цитированная литература</b> .....	111
--------------------------------------	-----

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальная геометрия заложена в работах К. Гаусса, Л. Эйлера, Ж. Френе и других математиков. Её методы есть развитие методов дифференциального исчисления применительно к геометрическим исследованиям. Изучает дифференциальная геометрия свойства кривых и поверхностей евклидова пространства, которые рассматриваются локально. Возможно распространение методов евклидовой геометрии на псевдоевклидову и галилееву геометрии, в связи с чем указываем основные понятия этих геометрий. Обобщением дифференциальной геометрии является риманова геометрия, но это направление мы не рассматриваем. Приводится обзор внутренней геометрии поверхности и указывается альтернативный подход к изучению геометрии поверхности, основанный на преобразованиях.

Мы четко указываем используемую аксиоматику. Геометрию строим в векторной аксиоматике Г. Вейля. Основным является аффинное пространство, по нему строятся евклидовы пространства.

Для обобщения евклидова пространства – топологического пространства, приводятся только основные понятия.

Часть I является вводной, необходима как база геометрии; многие ее вопросы предназначены для самостоятельного изучения. На лекциях изучаются: векторная аксиоматика, свойства прямых и плоскостей, евклидово скалярное произведение векторов, понятие евклидова пространства. Часть II представляет собой основное содержание курса, подробно излагается и комментируется на лекциях, служит базой для специализации в одулярной галилеевой геометрии. Часть III реализует одулярный подход в изучении кривых и поверхностей, завершает лекционный курс и вводит в одулярную специализацию.

### **Литература по дифференциальной геометрии.**

1. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. – М.: изд-во МГУ, 1990. – 384с.
2. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987. – 432с.
3. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4. – М., 1958. – 420с.